TITLE:

非単調な分岐過程をもつ1径数1次元関数族 (調和・解析関数空間と線形作用素)

AUTHOR(S):

西沢, 清子

CITATION:
西沢, 清子. 非単調な分岐過程をもつ1径数1次元関数族 (調和・解析関数空間と線形作用素). 数理解析研究所講究録 1998, 1049: 87-93

ISSUE DATE:
1998-06

URL:
http://hdl.handle.net/2433/62201

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1049 巻 1998 年 87-93

非単調な分岐過程をもつ1径数1次元関数族

西沢　清子　　城西大学　理学部
350-0295 坂戸市けやき台 1–1
kiyoko@math.josai.ac.jp

1 Introduction

パラメターの変化で非線形関数族の力学系の複雑さを測ろうとするときに、その変化に伴う周期軌道の生成と消滅は最も基本的な分岐過程であって、この系の複雑度を示している。特に吸引的周期軌道の変化の様子はしばしば一方方向の、または両方向の熊手分岐図として描かれる。

ロジスチック関数族 $\{f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)\ ;\ \lambda \in [1,4]\}$ は最も簡単な非線形写像でありながら、その力学的挙動は複雑である。すなわち周期倍分岐カスケイドがカオスにいたる一般的なルートの一つであることを認識させた例である。しかし、この族の分岐はパラメター $\lambda \in \mathbb{R}$ が単調に増加するとき、周期軌道が生成されることがあっても、決して消滅はしないという単調性を有する。一般の非線形関数族では、周期軌道の分岐はロジスチック関数族の力学が示す分岐よりははるかに複雑で、この単調性という性質を持たない。さらにあるパラメターの近傍では周期軌道の生成と消滅が無限回生じることさえある。

ここでは、こうした1径数非線形関数族の非単調な分岐現象を論じる。

はじめに分岐に関する幾つかの定義をする。1径数非線形関数族を $\{f_\lambda\}_\Lambda$ とする。パラメター λ が単調に変化するとき、分岐値 λ_0 が **orbit creating** と呼ばれるのは、λ_0 で新たに周期点が生じ、存在していた周期点は消滅しないときで、**orbit annihilating** と呼ばれるのは、λ_0 で存在していた周期点は消滅し、新たに周期点が生じないときとする。さらに **neutral** とは周期点の誕生も消滅も起こらないときとする。族 $\{f_\lambda\}_\Lambda$ が **monotone increasing (resp. decreasing)** であるとは、すべての分岐値が neutral か orbit creating (resp. annihilating) のときで、**non-monotone** であるとは orbit creating と orbit annihilating な分岐値を同時に持つときとする。族 $\{f_\lambda\}_\Lambda$ が nonmonotone のときにはさらに細かくその分岐が区別されている。すなわち、first-bubble, second-bubble と呼ばれる安定な状態から、次に述べる antimonotone と呼ばれる複雑な分岐現象までさまざまな段階が生じている。

パラメーター λ が単調に変化するとき、分岐値 λ_0 が **anti-monotone** と呼ばれるのは、λ_0 の任意の近傍に無限個の分岐値で **orbit creating** と **orbit annihilating** であるものが存在するときで、族がこのような **anti-monotone** 分岐値を一つでももてば、この族を **anti-monotone** と呼ぶ。antimonotone な族に対する議論を 3 節で行う。

Milnor and Thurston ([MT88],[DH85]) は Teichmüller 空間の理論を使って、ロジスチック関数族 $\{f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)\ ;\ \lambda \in [1,4]\}$ は monotone increasing であることを示した。また区分的線形関数のテント写像族 $T_t(x) = t(1-|2x-1|)$ に対しても単調性が示されている。

しかしロジスチック関数族やテント写像族の分岐の単調性は, 1 径数非線形関数族の中ではむしろ特異であって、この二つの関数族に十分近い族でも単調性を持つかどうかは解っていない。多くの非線形関数族は非単調な分岐過程をもつ。

従ってパラメーターの入れ方がロジスチック関数族のようにある特定の関数 f を固定して $\{mf(x)\}_m,\ \ m \in \mathbb{R}$ と限ったものに対してはどうかという問題が生じてくる。すなわち、固定される関数に対してどのような制限があれば分岐の単調性が保証されるか？である。この問題に関して多くの研究が為されている。現在 f に対しては単峰でありシュワルツ微分が負である条件の基で、単調な分岐を持つ 1 パラメーター関数族 $\{mf(x)\}_m$ の特徴付けが研究されている。分岐の単調性はまたこの族の位相的エントロピーの単調性をも示している。このタイプの族に対する分岐については 2 節で論ずる。

2　非単調な分岐過程をもつ 2 次有理関数族

我々は論文 [FN96], [Nis96] で、この分岐の単調性問題に対する議論を具体的な関数族 $\{m(r+\frac{x}{1+x^2})\}_m$ (r, fixed) に対して展開した。これは H. E. Nusse and J. A. Yorke の論文 (p.329 in [NY88]) の次の部分に触発されたためであった。

> *" If it is written in our form, i.e.,* $m[b_0 + a_0\frac{x}{1+x^2}]$*, by fixing the ratio of a and b, it apparently does not exhibit period-halving bifurcation as the parameter m is increased."*

この記述にはかなりの曖昧さがある。すなわち比の取り方によって、この関数族は様々な分岐過程を生じる。たとえば比が 0.58 のとき関数族 $\{m(0.58+\frac{x}{1+x^2})\}$ は非単調な分岐過程、詳しくは first bubble を持つ。

関数族の分岐の多様性を説明するためにとる我々の基本的な方法 ([FN96],[FN97],[Nis96]) は実 2 次有理関数族のモヂュライ空間でこの関数族 $\{mf(x)\}_m$ が定義する代数曲線 γ_f の

性質を調べることに帰着させる。具体的には、モヂュライ空間に適当な座標 (σ_1, σ_2) をいれ、関数の力学的挙動によってこの空間を分割し、双曲成分の配置と分岐現象を引き起こす特定の代数曲線群を定義し、つぎに曲線 γ_f がどの双曲成分を通過するか、またどの特定の代数曲線群と交差するかを調べることである。

定理 1　パラメター r を固定して得られる 1 パラメター関数族 $\{f_{m,r}(x)\}_m$ は、モヂュライ空間 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ で、既約代数曲線 $\mathcal{H}_r$ 上の全ての点と一致する。$r(\neq \frac{1}{2}, 0)$ に対しては次の方程式が対応する既約 4 次代数曲線 $\mathcal{H}_r$ の定義方程式である：

$$\begin{aligned} H_r(\sigma_1, \sigma_2) &= -r^2\sigma_1^4 + (8r^2-2)\sigma_1^3 + ((8r^2-1)\sigma_2 - 128r^4 + 8r^2 + 1)\sigma_1^2 \\ &\quad +((-32r^2+8)\sigma_2 + 512r^4 - 96r^2 - 12)\sigma_1 + (-16r^2+4)\sigma_2^2 \\ &\quad +(512r^4 - 96r^2 - 12)\sigma_2 - 4096r^6 + 1536r^4 - 144r^2 + 36 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

$r = \frac{1}{2}$ のときには 3 次代数曲線 $\mathcal{H}_{1/2}$：

$$H_{\frac{1}{2}}(\sigma_1, \sigma_2) = -\sigma_1^3 - 2\sigma_1^2 + (4\sigma_2 - 24)\sigma_1 + 8\sigma_2 - 64 = 0. \tag{2}$$

$r = 0$ のときには $\mathcal{H}_0$:

$$H_0(\sigma_1, \sigma_2) = 2\sigma_1^3 + \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 4\sigma_2^2 - 8\sigma_1\sigma_2 + 12\sigma_1 + 12\sigma_2 - 36 = 0. \tag{3}$$

がそれぞれ対応する。

ここで $r = 0$ のときの曲線 $\mathcal{H}_0$ は、

$$f_{m,0}(x) = m\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = m\left(\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right) \sim \frac{1}{m}\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

に注意すれば J. Milnor ([Mil92]) による次の結果とリンクする：モヂュライ空間の特異部分 $\mathcal{S}$ の関数は次のようなパラメター表示を持つ

$$\mathcal{S} = \{\left\langle k\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\rangle;\ \ k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

我々のモデルの変数 r, m, σ_1, σ_2 を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ に拡張すれば $\mathcal{S} = \{\langle f_{m,0}\rangle; m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ であって、曲線 $\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ で symmetry locus $\mathcal{S}$ と一致する。

パラメター m が単調に変化するとき代数曲線 $H_r(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ がモヂュライ空間のどの部分を通過するかを調べることで、r を固定したときの関数族

$$\left\{f_{m,r}(x) = m\left(r + \frac{x}{1+x^2}\right)\right\}_{(m,r)\in\mathbb{R}^2}$$

のおおまかな分岐が決まる。すなわち、

定理 2　r を範囲 $\frac{3\sqrt{3}}{8} \le r$ にとり固定すれば、$\{f_{m,r}\}$ には如何なる分岐も生じない。さらにこの値 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ は次の意味で最良のものである：$r < \frac{3\sqrt{3}}{8}$ であれば 関数族 $\{m(r+\frac{x}{1+x^2})\}$ は必ず周期倍分岐を引き起こす。

3 Antimonotonicity

S. Dawson, C. Grebogi, J. Yorke, I. Kan and H. Koçak 達は論文 [DGYKK92] で、1係数の1次元及び2次元関数族が antimonotone であるための十分条件を与えてる:

our main findings are
(A) A smooth one-dimensional map depending on oneparameter has an antimonotone parameter value whenever at least two independent critical points are contained in the interior of a chaotic attractor.
(B) A smooth invertible dissipative two-dimensional map depending on one parameter has an antimonotone parameter value at any nondegenerate homoclinic tangency value.

We now present a heuristic argument and numerical evidence to support (A).

2次元関数族に対する条件 (B) が正しいことは証明されているが、1次元関数族に対する条件 (A) に対しては次の3次多項式族を引用して正しいであろうと述べている:

$$f_\lambda(x) = -x^3 + 1.2675x - \lambda.$$

この記述 (A) に対して, (A) の条件を満たしながら antimonotone parameter value を持たない1係数3次多項式族が存在する。

2節の場合と同様に、3次多項式族のモヂュライ空間に適当な座標 (σ_1, σ_3) をいれ、関数の力学的挙動によってこの空間を分割し、双曲成分の配置と分岐現象を引き起こす特定の代数曲線群を定義し、つぎに曲線がどの双曲成分を通過するか、またどの特定の代数曲線群と交差するかを調べることである。

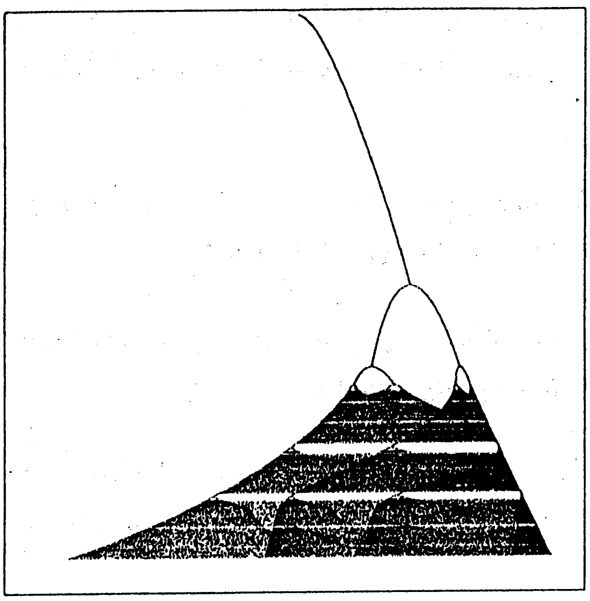
(A) の条件を満たしながら単調である1径数3次多項式族の例は次式である。

$$\begin{aligned} f_{\sigma_1}(x) &= -x^3 - 2Ax + \sqrt{|B|}, \\ A &= \frac{\sigma_1 - 6}{9}, \\ B &= \frac{\sigma_3 + 1/27(\sigma_1 - 6)(2\sigma_2 - 3)^2}{27}, \\ & \quad 8{\sigma_1}^2 - 96\sigma_1 + 3\sigma_3 + 288 = 0. \end{aligned}$$

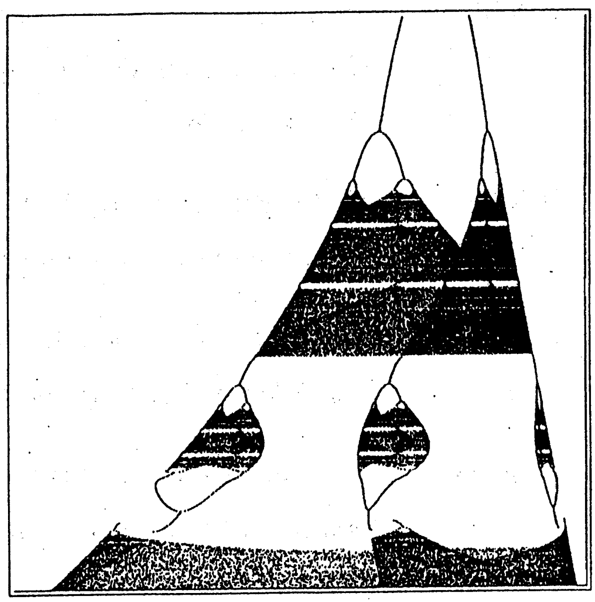
この3次多項式族は、3次多項式族のモヂュライ空間内で BC1 と呼ばれる中心曲線 ([NN93]) である。すなわち相異なる2個の特異点に関して、一方が他に写されるような3次多項式の集合である。

Milnor([Mil90]) による双曲成分の分類によれば、BC1 は B-タイプの双曲成分の1つの中心を通る既約代数曲線であり、Kneading sequence, topological entropy の単調性が示されている。したがってその分岐図は1方向の熊手分岐図を示す。一方 antimonotone の3次多項式族の分岐図は向き合った熊手分岐図を示し、かつカオス帯でぶつかっている。

曲線 BC1 に沿っての $\{f_{\sigma_1}(x)\}_{\sigma_1}$ の分岐図と, $\lambda \in [0.51.1]$ での $\{f_\lambda(x)\}_\lambda$ の分岐図を示す。防衛大の藤村雅代氏によるものである。



Bifurcation diagram of cubic family (BC1): $-2 < x < 2,\ 0 < a < 2$



Bifurcation diagram of cubic family: $-1.5 < x < 1.7,\ 0.5 < b < 1.1$

2次元の場合には, 関数族が dissipative planar diffeomorphisms のときには homoclinic-tangency parameter の存在から antimonotonicity が示されている ([KKY92]) のと対照的に、antimonotone な1次元関数族の解析はほとんど手が付けられていない。β-lift という1次元関数族 $\{f_\lambda(x)\}_\lambda$ から2次元関数族 $\{F_{\beta,\lambda}(x,y)\}_{\beta,\lambda}$ を作り:

$$F_{\beta,\lambda}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\lambda(x)+\beta y \\ x \end{pmatrix}, \quad 0 < |\beta| < 1$$

, これに Antimonotonicity Theorem を適用する方法も取られているが ([Jona93])、このとき Newhouse-interval が、β を 0 にちかずけた時に生き残るかの判定が難しい。ロジスチック関数族に対するヘノン写像族のように Newhouse-interval が消滅する場合がある。

References

[BB84] M. Bier and T. C. Bountis. Remerging Feigenbaum Trees in Dynamical Systems. *Phys. Lett. A*, 104A(5):239–244, 1984.

[DH85] A. Douady and J. Hubbard. *Etude dynamique des polynomes complexes I,II.* Publ. Math. Orsay, 1984,1985.

[DGYKK92] S. Dawson, C. Grebogi, J. Yorke, I. Kan and H. Koçak *Antimonotonicity: invertiblereversals of period-doubling cascades* *Phys. Lett. A*, 162:249–254, 1992.

[FN96] M. Fujimura and K. Nishizawa. *Bifurcations and Algebraic Curves for Quadratic Rational functions* $\{mf(x)\}_m$. *International Journal of DCDIS*, 4:31–46, 1998.

[FN97] M. Fujimura and K. Nishizawa. *Moduli spaces and symmetry loci of polynomial maps* . *Proceedings of ISSAC98*, ACM: 342–348, 1997.

[KKY92] I. Kan, H. H. Koçak, J. Yorke *Antimonotonicity:Conncurrent creation and annihilation f periodic orbits* *Annals of Math*, 136:219–252, 1992

[Jona93] T.M. Jonassen *A short note antimonotonicity in bifurcation diagrams of families of one-dimensional maps* *Preprint series Math. Univ. Oslo*,No.41, 1993

[Mil90] J. Milnor. *Remarks on iterated cubic maps.* Preprint # 1990/6, SUNY Stony Brook, 1990.

[Mil92] J. Milnor. *Remarks on quadratic rational maps.* Preprint # 1992/14, SUNY Stony Brook, 1992.

[MT88] J. Milnor and W. Thurston. *On iterates maps of the interval. Lecture Notes in Math.*, 1342:465–563, 1988.

[Nis96] K. Nishizawa. Nonmonotone Bifurcation for Quadratic Rational Functions $\{mf(x)\}_m$. *Nonlinear Analysis* , 30: 1497 – 1504, 1997

[NN93] K. Nishizawa and A. Nojiri. *Center curves in the moduli space of the real cubic maps. Proc. Japan Acad. Ser.A,*, 69: 179 – 184, 1993

[NY88] H. E. Nusse and J. A. Yorke. *Period Halving for* $x_{n+1} = MF(x_n)$ *Where F Has Negative Schwarzian Derivative. Phys. Lett. A*, 127(6,7):328–334, 1988.